მარიამ ბერაძე, გიორგი ჩინჩალაძე
ქართულ-ამერიკული უნივერსიტეტი, ბიზნესის სკოლა

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:

ირაკლი ჭელიძე
ქართულ-ამერიკული უნივერსიტეტი, დოქტორანტი

ცოტნე კუტალია
ქართულ-ამერიკული უნივერსიტეტი, დოქტორანტი

დეფოლტის დროს სესხის ნაშთის შეფასება კოპულა ფუნქციების გამოყენებით

რეზიუმე

სტატიის მიზანია, სესხის გადეფოლტების მომენტში დარჩენილი ნაშთის შეფასება. აღნიშნული კომპონენტი აუცილებელია სესხის მოსალოდნელი დანაკარგისა და საჭირო კაპიტალის მოცულობის შესაფასებლად. სესხის მოსალოდნელი დანაკარგისა და კაპიტალის შესაფასებლად საჭიროა სამი კომპონენტი: PD (სესხის გადეფოლტების ალბათობა), LGD (გადეფოლტების დროს სესხის ნაშთის დაუბრუნებელი ნაწილი), EAD (სესხის გადეფოლტების შემდეგ დარჩენილი ნაშთი). ამათგან ყველაზე მეტად განვითარებულია PD-ს შეფასების მოდელები. LGD და EAD მოდელების ნაკლებობის გამო იყენებენ მათ ზოგად შეფასებებს. სტატიაში შევეცდებით, წარსული მონაცემების დამუშავებით, დავადგინოთ გარკვეული კანონზომიერება სესხის მოცულობასა და EAD-ს შორის და შემდეგ გავაკეთოთ პროგნოზი. კანონზომიერების შესაფასებლად გამოვიყენებთ ერთობლივი განაწილების აღმწერ სტატისტიკურ მოდელს-კოპულა ფუნქციას.

შესავალი

სტატიის მიზანია სესხის გადეფოლტების მომენტში დარჩენილი ნაშთის შეფასება. აღნიშნული კომპონენტი აუცილებელია სესხის მოსალოდნელი დანაკარგისა და საჭირო კაპიტალის მოცულობის შესაფასებლად. სესხის მოსალოდნელი დანაკარგი შედგება სამი კომპონენტისაგან: PD (სესხის გადეფოლტების ალბათობა), LGD (გადეფოლტების დროს სესხის ნაშთის დაუბრუნებელი ნაწილი), EAD (სესხის გადეფოლტების შემდეგ დარჩენილი ნაშთი). ამათგან ყველაზე მეტად, განვითარებულია PD-ს შეფასების მოდელები. LGD და EAD მოდელების ნაკლებობის გამო, იყენებენ ზოგად შეფასებებს. ნაშრომში შევეცდებით წარსული მონაცემების დამუშავებით დავადგინოთ გარკვეული კანონზომიერებები სესხის მოცულობასა და EAD-ს შორის და შემდეგ გავაკეთოთ პროგნოზი. კანონზომიერების შესაფასებლად გამოვიყენებთ ერთობლივი განაწილების აღმწერ სტატისტიკურ მოდელს-კოპულა ფუნქციას.

ნაშრომი დაყოფილია სამ ძირითად ნაწილად. პირველი ნაწილში აღწერილია საკრედიტო რისკი. მეორე ნაწილში, მოცემულია, კოპულა ფუნქციების მათემატიკური ანალიზი. მესამე ნაწილში მოყვანილია მაგალითი ნაშრომში ნაჩვენები მოდელის პრაქტიკული გამოყენების თვალსაჩინოდ წარმოსადგენად.

პირველი ნაწილი, თავის მხრივ, დაყოფილია ქვეთავებად. მიმოხილულია საკრედიტო რისკი და საკრედიტო რისკისგან თავის დასაზღვევად რეზერვის არსებობის აუცილებლობა. შემდეგ ქვეთავში გაგაცნობთ ბაზელის რეგულაციებს, რომლებიც უწესებენ ბანკებს რეზერვების მოცულობას. წარმოვადგენთ მოსალოდნელი დანაკარგის დასათვლელ ფორმულას და მის კომპონენტებს. განვიხილავთ ერთ-ერთი კომპონენტის-დეფოლტის დროს სესხის ნაშთის დათვლის პრობლემებას. პრობლემის გადასაჭრელად შემოთავაზებული იქნება კოპულა ფუნქციის გამოყენება.

მეორე ნაწილში განვიხილავთ კოპულების ძირითად თეორიას, შემთხვევითი სიდიდეების თვისებებსა და რიცხვით მახასიათებლებს, რომლებიც

საჭიროა კოპულების ასაგებად. ასევე, აღვწერთ არქიმედეს ოჯახის კოპულებს და წარმოვადგენთ მათ რამდენიმე მაგალითს.

მესამე ნაწილში წარმოვადგენთ საილუსტრაციო მაგალითს. ერთ-ერთი ბანკის სესხის მოცულობასა და დეფოლტის დროს სესხის ნაშთის წყვილებზე მოვარგებთ კოპულა ფუნქციას. მოდელის გამოყენებით განვიხილავთ კონკრეტულ შემთხვევას 1,000 ლარიანი სესხის მოცულობის მაგალითზე.

საკრედიტო რისკი

საკრედიტო რისკი მოიცავს რისკს, რომ მსესხებელი განიცდის დეფოლტს, ვერ შეასრულებს თავის მიერ აღებულ ვალდებულებას და ვერ შეძლებს ვალდებულებით გათვალისწინებული თანხის მთლიანად დაბრუნებას.

ბანკებს სჭირდებათ საკრედიტო რისკის მართვა, როგორც მთლიანი პორტფელისათვის, ასევე თითოეული სესხისა და ტრანზაქციისთვის ინდივიდუალურად. რეზერვის ეფექტური მართვა უმნიშვნელოვანესი კომპონენტია ბანკების რისკების გონივრული მართვის პროცესში და გრძელვადიანი წარმატების მიღწევის აუცილებელი წინაპირობაა.

პრაქტიკა გვაჩვენებს, რომ კარგი საკრედიტო ისტორიის მქონე მომხმარებლებთან ურთიერთობისასაც კი, ბანკი შეიძლება დადგეს ვალდებულების შეუსრულებლობის საშიშროების წინაშე. აქედან გამომდინარე, საჭიროა, დანაკარგისაგან თავის დაზღვევა არა მხოლოდ გადეფოლტების მაღალი რისკის მქონე მომხმარებლის, არამედ თითოეული კლიენტის შემთხვევაში. ბანკებს შეუძლიათ დანაკარგისგან თავის დაზღვევა თითოეული გაცემული სესხისთვის მოსალოდნელი ზარალის შეფასებით და ამ მოცულობის რეზერვის შექმნით. აღნიშნული რეზერვი ემსახურება გადეფოლტებული სესხებიდან წარმოქმნილი ზარალის დაფარვას. ამის გამო, ბანკები ვალდებულნი არიან გააცნობიერონ საკრედიტო რისკის იდენტიფიცირების, მონიტორინგისა და კონტროლის საჭიროება. ასევე მათ უნდა განსაზღვრონ ინარჩუნებენ თუ არა შესაბამისი კაპიტალის ადეკვატურობას მოცემული საკრედიტო რისკისათვის.

ბანკისთვის ყველაზე ცუდი შემთხვევა ერთი წლის განმავლობაში მთლიანი პორტფელის დაკარგვაა. ასეთი შემთხვევის ალბათობა ძალიან მცირეა; ამიტომ მთლიანი პორტფელის მოცულობის ტოლი რეზერვის გადადება არაეფექტურია. მას შეუძლია ეს თანხა გადააქციოს მომგებიან ინვესტიციებად. გასათვალისწინებელია ის ფაქტიც, რომ თუ ბანკი რეზერვს ძალიან შეამცირებს მაშინ შესაძლოა მან მიიღოს იმაზე მეტი ზარალი ვიდრე მოელის და ამის გამო ვერ გაუმკლავდეს საკუთარ ვალდებულებებს. ოპტიმალური გზაა, ბანკმა რეზერვის მოცულობა განსაზღვროს ზუსტად მოსალოდნელი ზარალის ოდენობით.

ბანკები განსაზღვრავენ რეზერვის მოცულობას ბაზელის რეგულაციების მიხედვით. საქართველოში, საქართველოს ეროვნული ბანკის სტანდარტების მიხედვით, სესხის რეზერვის მოცულობა განისაზღვრება ვადაგადაცილებული დღეების მიხედვით, შემდეგი სქემის მიხედვით:

ნახაზი 1.
სესხის დარეზერვების სტანდარტი

ვადაგადაცილების დღე	რეზერვი
0-30	2%
30-60	10%
60-120	30%
120-180	50%
>180	100%

ბაზელის რეგულაციის სტანდარტების მიხედვით, კაპიტალისა და რეზერვის შეფასების სტანდარტულ მიდგომასთან ერთად არსებობს Internal ratings based (IRB) მიდგომა. ეს მეთოდი შესაძლებლობას აძლევს ბანკებს, დაითვალონ და შეაფასონ საკრედიტო რისკისთვის საჭირო რეზერვი და კაპიტალი თავისი შიდა მეთოდებით. ამისათვის მოდელები უნდა აკმაყოფილებდნენ გარკვეული სახის პირობებსა და გარე მაკონტროლებლის მოთხოვნებს. ყველა ფინანსურ ინსტიტუტს, რომელიც იყენებს Internal ratings based მოდელს, უფლება აქვს დამოუკიდებლად განსაზღვროს მსესხებლის გადეფოლტების ალბათობა, მოსალოდნელი დანაკარგი და კაპიტალი.

მოსალოდნელი დანაკარგი შედგება რამდენიმე კომპონენტისგან: Probability of Default (PD), Loss Given Default (LGD), Exposure at Default (EAD).

მოსალოდნელი დანაკარგი (EL) განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$EL = PD \times LGD \times EAD$$

სადაც,

PD – სესხის გადეფოლტების ალბათობა;

LGD – გადეფოლტების დროს სესხის ნაშთის დაუბრუნებელი ნაწილი;

EAD – სესხის გადეფოლტების შემდეგ დარჩენილი ნაშთი.

გამომდინარე იქიდან რომ თითოეული კომპონენტი წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, ბანკებისთვის წინასწარ უცნობია მათი რიცხვითი მნიშვნელობა. ამის გამო საჭირო ხდება მათი შეფასება.

Probability of Default (PD) – წარმოადგენს სესხის გადეფოლტების ალბათობას. არსებობს დეფოლტის მრავალი განმარტება. მათგან ყველაზე მეტად გავრცელებულია 90 დღეზე მეტი ვადაგადაცილება. ხშირ შემთხვევაში, დეფოლტად მიიჩნევენ ასევე არასტაბილური შემოსავლის მქონე და სუსტი ფინანსური მდგომარეობის მქონე მსესხებელსაც. მიუხედავად ამისა, არსებობს სესხების გადეფოლტების შეფასების არაერთი ტექნიკა, რომლებსაც ბანკები აქტიურად იყენებენ.

Loss Given of Default (LGD) – არის დანაკარგი, რომელსაც ბანკი იღებს სესხის გადეფოლტების დროს. იმ შემთხვევაში, თუ სესხი არ გადეფოლტდა, LGD ნულის ტოლია. იმ შემთხვევაში, თუ სესხი არაუზრუნველყოფილია და დეფოლტის შემთხვევაში ბანკი სრულად დაკარგავს სესხის ნაშთს (EAD), მაშინ LGD 100%-ს უდრის. LGD ყოველ სესხზე იცვლება მისი სპეციფიკიდან გამომდინარე; ის დამოკიდებულია აქტივზე, რომლითაც უზრუნველყოფილია სესხი, (რაც უფრო ლიკვიდურია ის, მით უფრო მცირეა LGD და პირიქით) და თავად კრედიტის სპეციფიკაზე, რადგან უზრუნველყოფის დასაკუთრება არ წარმოადგენს სესხის ამოღების ერთადერთ საშუალებას.

Exposure at Default (EAD) – დავალიანების მოცულობა, რომელიც დარჩება მსესხებელს გადასახდელი, სესხის გადეფოლტების შემთხვევაში. აღსანიშნავია, რომ რაც უფრო დიდია გაცემული სესხის მოცულობა, მით უფრო დიდია ნაშთიც გადეფოლტების შემთხვევაში. PD და LGD შესაფასებლად არსებობს ბევრი მოდელი, რასაც ვერ ვიტყვით EAD-ზე. ბაზელის რეგულაციის თანახმად, EAD-ის მოცულობა არ უნდა იყოს სესხის მიმდინარე ნაშთზე ნაკლები. რევორვილებადი სესხებისთვის EAD-ის შეფასება ხდება შემდეგნაირად:

$$EAD = CURRENT\ EXPOSURE + CCF \times UNDISBURSED\ EXPOSURE$$

სადაც,

Current Exposure – სესხის მიმდინარე ნაშთი;

CCF (Credit Conversion Factor) – აუთვისებელი თანხის, სესხის ნაშთში მაკონვერტირებელი კოეფიციენტი:

Undisbursed Exposure – სესხის აუთვისებელი მოცულობა.

EAD-ის დასადგენად არსებობს ორი მიდგომა: Fundamental approach და Advance approach. Fundamental მიდგომის მიხედვით, CCF მარეგულირებლის მიერ არის მოცემული. ხოლო Advance მიდგომის შემთხვევაში, ბანკს თავად შეუძლია შეაფასოს აღნიშნული კოეფიციენტი. ასეთ შემთხვევაში შეფასება მთლიანად დამოკიდებულია ბანკის ხედვასა და ინტუიციაზე.

არარევორვილებადი სესხების შემთხვევაში, მოსალოდნელი ზარალის გამოთვლისას, EAD-ის შეფასებად იყენებენ მიმდინარე ნაშთს:

$$EAD = CURRENT\ EXPOSURE$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ბანკები თითოეულ გაცემულ სესხზე, რეზერვის სახით ინახავენ ამ სესხის გარკვეულ პროცენტს. რეზერვის გამოთვლის ერთ-ერთ გზას წარმოადგენს მოსალოდნელი დანაკარგის შეფასება, რომელიც შედგება სამი კომპონენტისგან. თითოეული კომპონენტის სწორად შეფასება აუცილებელია მთლიანად მოსალოდნელი დანაკარგის სისწორისთვის. ერთ-ერთ კომპონენტს წარმოადგენს დეფოლტის დროს სესხის დარჩენილი ნაშთი (EAD). როგორც აღვნიშნეთ სესხის გაცემის მომენტში EAD-ის წინასწარი შეფასება ვერ ხდება. ნაშრომში შევეცადეთ სესხის თანხისა და საკრედიტო ნაშთის წყვილებზე დაკვირვებით, სესხის მომავალი მოსალოდნელი EAD-ს შეფასება. ამისათვის გამოვიყენეთ სტატისტიკური ანალიზი კოპულა ფუნქციის გამოყენებით. EAD-ის წინასწარი შეფასება ბანკებს მისცემთ საშუალებას სწორად შეაფასონ მოსალოდნელი და-

ნაკარგი და თითოეულ სესხზე დააწესონ უკეთ შეფასებული რეზერვი.

კოპულა ფუნქცია

კოპულა ფუნქცია და მისი უპირატესებობი

კოპულა ფუნქცია არის [0,1] ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების ფუნქცია; ის არის სასარგებლო ინსტრუმენტი შემთხვევითი სიდიდეების დამოკიდებულების სტრუქტურის აღსაწერად.

ყველაზე პოპულარული დამოკიდებულების საზომი პირსონის კორელაციის კოეფიციენტია, რომელიც გვიჩვენებს ორი შემთხვევითი სიდიდის წრფივი დამოკიდებულების სიძლიერესა და მიმართულებას.

$$\rho\,(X,Y)\;=\frac{COV(X\,,Y)}{\sqrt{\sigma_X^2}\sqrt{\sigma_Y^2}}$$

სადაც,

$$COV(\,X,\,Y\,) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

კორელაციის კოეფიციენტი არის დამოკიდებულების სკალარული საზომი და არაფერს გვეუბნება დამოკიდებულების სტრუქტურის შესახებ. იგი გვაძლევს კარგ შედეგს, როდესაც შემთხვევითი სიდიდეები ნორმალურად არიან განაწილებული, მაგრამ არ არის შესაფერისი საზომი მეტად გადახრილი შემთხვევითი სიდიდეების დამოკიდებულების შესაფასებლად, რომელთა ვარიაციებიც მიისწრაფიან უსასრულობისკენ. განსაკუთრებით საკრედიტო რისკების სიდიდეები ასიმეტრიულობით გამოირჩევიან შემთხვევითი ექსტრემალური დანაკარგების გამო.

კოპულას ძირითადი უპირატესობები:

- პირსონის კორელაციის კოეფიციენტის დასათვლელად თითოეული შემთხვევითი სიდიდე უნდა იყოს სასრული დისპერსიის. კოპულა ფუნქციებს შეუძლიათ უსასრულო დისპერსიის მქონე შემთხვევითი სიდიდეების დამოკიდებულების განსაზღვრა.
- პირსონის კორელაციის კოეფიციენტი მხოლოდ ერთი რიცხვია, მაშინ როცა, კოპულა დამოკიდებულების საზომი ფუნქციაა.
- პირსონის კორელაციის კოეფიციენტი მკაცრად ზრდადია მხოლოდ წრფივი გარდაქმნის მიმართ. შემდეგ პარაგრაფებში ვნახავთ, რომ კოპულა ინვარიანტულია ნებისმიერი ზრდადი გარდაქმნის მიმართ.

ზემოთ აღწერილი ნაკლოვანებების გამო, პირსონის კორელაციის კოეფიციენტი ვერ აღწერს შემთხვევით სიდიდეთა დამოკიდებულების სრულ სტრუქტურას.

კოპულა ფუნქცია განსაზღვრავს შემთხვევითი სიდიდეების ურთიერთდამოკიდებულებას, მარგინალური განაწილებების გაერთიანებით, საერთო განაწილების შესაქმნელად. ასეთი გზით, კოპულა გამოხატავს დამოკიდებულებას, ხოლო შემთხვევითი სიდიდეების ზომასა და ფორმას გვიჩვენებს მარგინალური განაწილებები.

კოპულა ფუნქცია

კოპულა არის ორი ცვლადის ისეთი C ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. C ფუნქციის განსაზღვრის არეა $[0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$ სიბრტყე

2. $C(0,v) = C(u,0) = 0$ და $C(u,1) = u, C(1,v) = v$ ყოველი u და v-სთვის, $u, v \in [0,1]$.

3. C ორად ზრდადი ფუნქციაა, ანუ ყოველი $(u_1,v_1) \in [0,1]^2$ და $(u_2,v_2) \in [0,1]^2$-თვის რომელთათვისაც $0 \le u_1 \le u_2 \le 1$ და $0 \le v_1 \le v_2 \le 1$

სწორია შემდეგი უტოლობა:

$$C(u_2,v_2) + C(u_1,v_1) \ge C(u_2,v_1) + C(u_1,v_2)$$

სკლარის თეორემა:

სკლარის თეორემა, რომელიც 1959 წელს ჩამოყალიბდა გვიჩვენებს, რომ ნებისმიერი მულტივარიაციული ერთობლივი განაწილება შეიძლება გამოისახოს ერთგანზომილებიანი მარგინალური განაწილების ფუნქციით და არსებობს ერთადერთი კოპულა, რომელიც აღწერს შემთხვევითი სიდიდეების დამოკიდებულების სტრუქტურას. ანუ, ნებისმიერი ორი სიდიდისთვის არსებობს ერთადერთი ფუნქცია, რომელიც ქმნის ერთობლივ განაწილებას და პირიქით,

ერთობლივი განაწილებიდან შეგვიძლია მივიღოთ მარგინალური განაწილებები.

$X \sim F(x), Y \sim G(y)$ შემთხვევითი სიდიდეებისთვის U და V დავარქვათ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეებს, რომლებისთვისაც $U=F(X)$ და $U=F(X)$.

სკლარის თეორემის თანახმად, არსებობს რაიმე C (კოპულა) ფუნქცია რომლისთვისაც კმაყოფილდება შემდეგი ტოლობა:

$$H(x,y)=C(F(x),G(y))$$

სადაც, $x, y \in R$

თუ F და G არიან მკაცრად ზრდადი უწყვეტი მარგინალური განაწილების ფუნქციები, მაშინ C ერთადერთია და მოიცემა შემდეგი სახით:

$$H(x,y)=P\{X \le x, Y \le y\}= P\{F^{-1}(U) \le x, G^{-1}(V) \le y\}$$
$$=P\{U \le F(x), V \le G(y)\}=C(F(x),G(y))$$

ხოლო ერთობლივი განაწილების სიმკვრივის ფუნქცია $h(x,y)$ ფორმულით:

$$h(x,y)=c(F(x),G(y))f(x)g(y)$$

f და g აღნიშნავს შესაბამისად F და G განაწილებების სიმკვრივეს, ხოლო

$$c(u,v) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial u \partial v}$$

ფუნქცია არის C-ს შესაბამისი სიმკვრივის ფუნქცია. კოპულას სიმკვრივე შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$c(u,v) = \frac{h(F^{-1}(u), G^{-1}(v))}{f\left(F^{-1}(u)\right)g\left(G^{-1}(v)\right)}$$

და ასევე პირიქით სამართლიანია დებულება, რომ ყოველი

$$C(u,v)=P\{U \le u=F(x), V \le v=G(y)\}$$

ფუნქციისთვის არსებობს ერთობლივი განაწილების ფუნქცია $H(x,y)$, რომელიც ასევე არის ერთადერთი F და G არიან უწყვეტები.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარე, სკლარის თეორემა არის ძალიან მნიშვნელოვანი, რათა ვიპოვოთ შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების ფუნქცია.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, სკლარის თეორემა მნიშვნელოვანია შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების ფუნქციის საპოვნელად.

არქიმედეს ოჯახის კოპულები

არსებობს კოპულების რამდენიმე ოჯახი, ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ყველაზე გავრცელებული კოპულების ოჯახს – არქიმედეს კოპულებს.

არქიმედეს კოპულები რამდენიმე უპირატესობით გამოირჩევა:

1. ადვილი და მოქნილია ასაგებად;
2. გვთავაზობს სხვადასხვა სახეობის კოპულების ოჯახებს, რომელიც გვეხმარება მრავალფეროვანი დამოკიდებულების სტრუქტურის ასაგებად;
3. ამ ოჯახის წევრებს ბევრი გამოსაყენებელი თვისებები ახასიათებთ, რომლებსაც შემდგომში განვიხილავთ.

არქიმედეს კოპულების ასაგებად სკლარის თეორემის გამოყენება არ არის საჭირო. არ არის აუცილებელი კოპულა ფუნქციის აგება შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების ფუნქციიდან და პირიქით. არქიმედეს კოპულები აიგება მათი გენერატორი ფუნქციებით.

არქიმედეს გენერატორი ფუნქცია φ არის $[0,1]$ ინტერვალზე განსაზღვრული მონოტონურად კლებადი ამოზნექილი ფუნქცია რომლისთვისაც $\varphi(1) = 0$. მისი შექცეული ფუნქცია ასეთია:

$$\varphi^{-1}(u) = \begin{cases} \varphi^{-1}(u) \text{ თუ } 0 \le u \le \varphi(0) \\ 0 \text{ თუ } \varphi(0) \le u \le \infty \end{cases}$$

და

$$\varphi\left(\varphi^{-1}(u)\right) = \begin{cases} u \text{ თუ } 0 \le u \le \varphi(0) \\ \varphi(0) \text{ თუ } \varphi(0) \le u \le \infty \end{cases}$$

არქიმედეს კოპულა განმარტებით არის კოპულა ფუნქცია, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$C(u,v)= \varphi^{-1}(\varphi(u)+ \varphi(v))$$

აღსანისნავია, რომ არქიმედეს კოპულები არიან, როგორც სიმეტრიულები, ასევე ასოციატიურები.

საილუსტრაციო მაგალითი

ჩვენ საშუალება გვქონდა გვეხელმძღვანელა ერთ-ერთი ბანკის სესხების პორტფელის მონაცემებით. ჩვენ დავამუშავეთ 1,000 სესხის ჩანაწერისთვის შემდეგი მონაცემები: სესხის თანხა და სესხის ნაშთი გადეფოლტების დროს. აღნიშნული რაოდენობა საკმარისია იმისათვის, რომ ნამდვილთან მიახლოებული მარგინალური განაწილებები მივიღოთ. X^2-ის ტესტის გამოყენებით, დავადგინეთ რომ სესხის მოცულობა განაწილებულია ლოგნორმალურად, ხოლო გაცემული სესხის მოცულობისა და გადეფოლტების შემთხვევაში გადაუხდელი თანხის (ნაშთის) ფარდობას, მოვარგეთ ბეტა განაწილება.

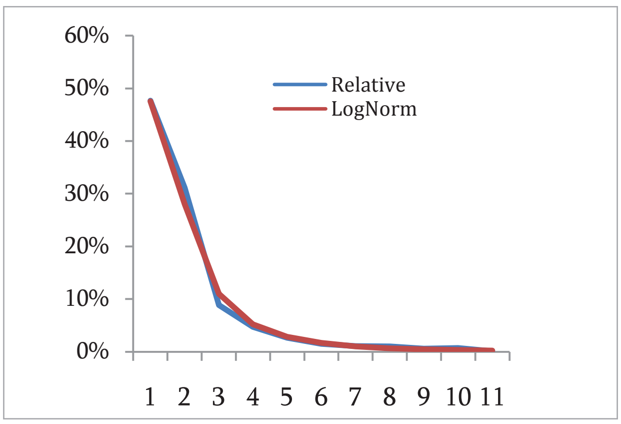
ფუნქციური კავშირის დასადგენად საჭიროა, მოცემულ მონაცემებზე კოპულა ფუნქციის გამოყენება. ამისათვის პირველ რიგში X და Y შემთხვევითი სიდიდეები უნდა გარდაიქმნან $[0,1]$-ზე თანაბრად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეებად. ხოლო F ლოგნორმალური განაწილებებაა, ხოლო G ბეტა განაწილება, შესაბამისი პარამეტრებით, ვიღებთ წყვილებს შემდეგნაირად:

$$u_i=LOGNORMDIST(x_i,\mu_x,\sigma_x,1)$$

$$v_i=BETADIST(y_i,\alpha_y,\beta_y,1)$$

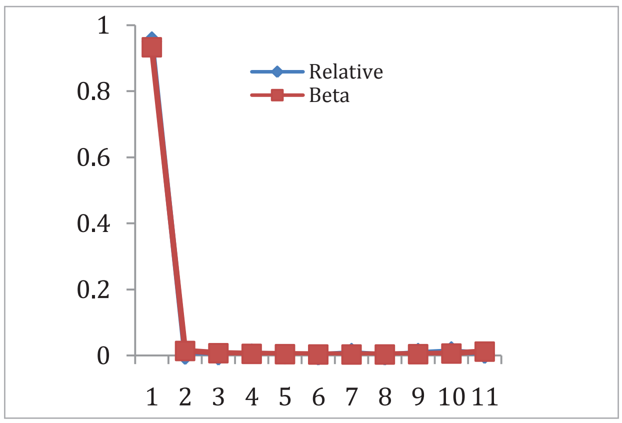
ნახაზი 2.

სესხის მოცულობის მარგინალური განაწილება



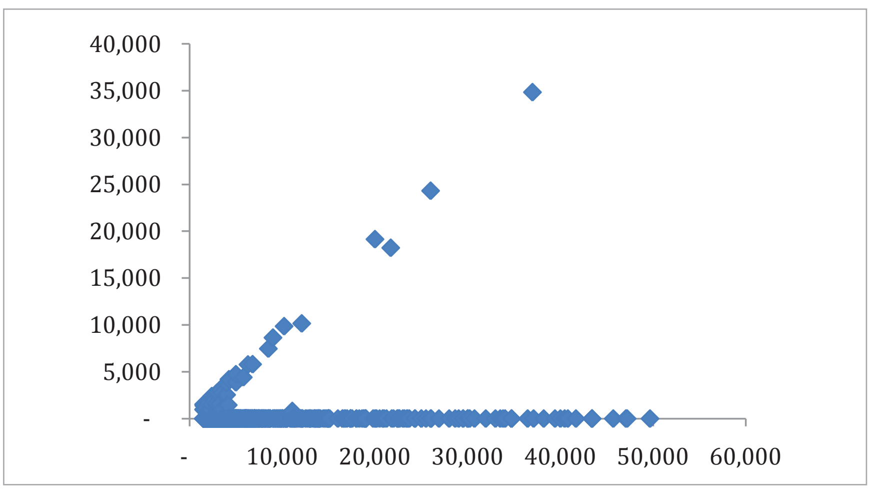
ნახაზი 3.

ნაშთის ფარდობის მარგინალური განაწილება



ნახაზი 4.

(u,v) წყვილების გაბნევის დიაგრამა



მიღებული *(u,v)* წყვილების გაბნევის დიაგრამა (Scatter Plot) შემდეგნაირად გამოიყურება. იხ. ნახაზი 4.

ამ დიაგრამაზე დაყრდნობით შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ ამ მონაცემების შესაბამისი კოპულა არის Ali Mikhail Haq-ის კოპულა, რომელიც მოიცემა შემდეგნაირად:

$$C_\theta(u,v) = \frac{u \times v}{1-\theta \times (1-u) \times (1-v)}$$

როგორც უკვე ვნახეთ, არქიმედეს კოპულების აგება ხდება მათი გენერატორი ფუნქციით რომელიც ყველა კოპულისათვის განსხვავებულია.

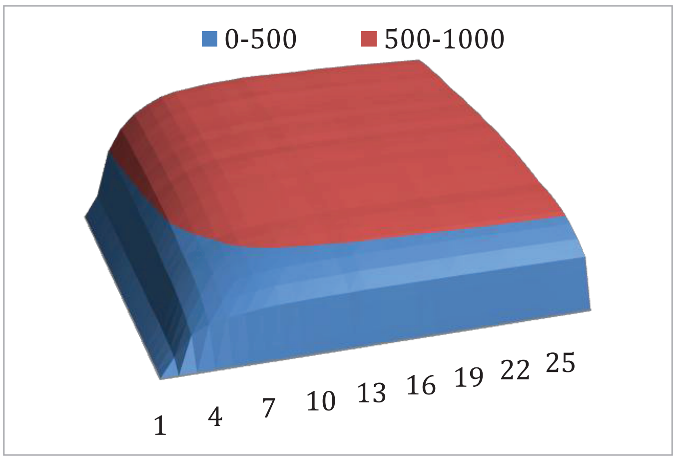
როგორც ვიცით, მონაცემებზე ერთგანზომილებიანი მარგინალური განაწილების მორგებაში გვეხმარება ჰისტოგრამის ფორმა, ანალოგიური კანონზომიერებები მოქმედებს თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების გაბნევის დიაგრამაზეც. მონაცემებზე კოპულა ფუნქციის მორგება წარმოადგენს ჰიპოთეზას, რომლის დადასტურებაც საჭიროა კოპულა ფუნქციით შემთხვევითი სიდიდეების დამოკიდებულების დასამოდელირებლად.

ზემოთ მოყვანილი გაბნევის დიაგრამისთვის ჩავატარეთ x^2 ტესტი.

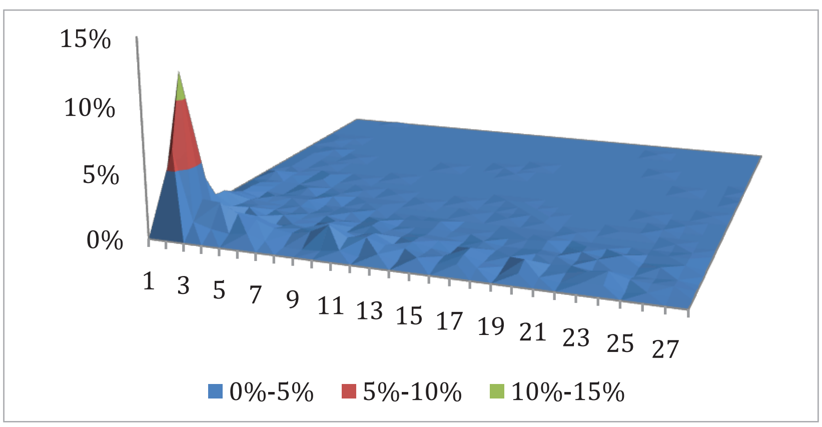
x^2 ტესტის ტაბულა გამოიყურება შემდეგნაირად:

Chi square Test			
14.77788	0.074759	0	0
0.788923	3.080818	0	0
3.655577	4.012768	0	0
0.35478	0.458538	0.106521	2.08032

ნახაზი 5.
ორგანზომილებიანი კუმულატიური კოპულას განაწილება



ნახაზი 6.
ორგანზომილებიანი სიმკვრივის განაწილება



ზემოთ მოცემულია x^2-ტესტის ტაბულა გამოთვლილია შემდეგი ფორმულით:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(O_{i,j} - E_{i,j}\right)^2}{E_{i,j}}$$

მოცემულ სტატისტიკას შეესაბამება P-Value 69%-ით.

x^2-ტესტის თანახმად ჰიპოთეზა დასტურდება, რომ *(X,Y)* შემთხვევით სიდიდეთა წყვილის აღმწერი კოპულა ფუნქცია არის Ali Mikhail Haq:

$$C_\theta(u,v) = \frac{u \times v}{1 - \theta \times (1-u) \times (1-v)}$$

არქიმედეს კოპულებისთვის წყვილების გათამაშება რამდენიმე ალგორითმით ხდება. ერთ-ერთი მათგანის შესაბამისად ვპოულობთ კოპულა ფუნქციის წარმოებულს რომელიმე ცვლადით (*u* ან *v*) და ვხსნით განტოლებას ამავე ცვლადის მიმართ, ხოლო ფუნქციის მნიშვნელობასა და მეორე ცვლადს ავიღებთ *[0,1]*-ზე თანაბრად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს.

ამ ეტაპზე, შეგვიძლია აღვადგინოთ სასურველი რაოდენობა *[0,1]*-ზე თანაბრად განაწილებული *U, V* წყვილების რომლებსაც უკვე არათანაბარ (ორიგინალ) შემთხვევით სიდიდეებად გარდავქმნით შესაბამისი მარგინალური განაწილების ფუნქციის შექცეული ფუნქციის დათვლით. ანუ დასიმულირებული $x_i=F^{-1}(u_i)$ და შესაბამისად $y_i=G^{-1}(v_i)$, $i=1,2\ldots n$. *U* და *V* წყვილების აღდგენის შემდეგ მივიღეთ ორგანზომილებიანი კუმულატიური კოპულას განაწილება. იხ. ნახაზი 5.

ხოლო ორგანზომილებიანი სიმკვრივის განაწილება გამოიყურება შემდეგნაირად. იხ. ნახაზი 6.

ამგვარად, კოპულა ფუნქციის გამოყენებით, ჩვენ შევაფასეთ გადეფოლტების დროს დარჩენილი სესხის ნაშთი. მოცემულ მონაცემებს მოვარგეთ Ali-Mikhael Haq-ის კოპულა, რომელიც საშუალებას იძლევა ნებისმიერი სესხის მოცულობისთვის წინასწარ განისაზღვროს სესხის მოსალოდნელი ნაშთი გადეფოლტების დროს.

მაგალითისთვის, თუ სესხის თანხა შეადგენს 1,000 ლარს ზემოთ განხილული მაგალითის მიხედვით, გადეფოლტების დროს მოსალოდნელი ნაშთი იქნება 399 ლარი.

S(inv)	U	V	EAD
1,000	0.08	0.39	399.3

თუ დეფოლტის ალბათობას ავიღებთ პირობითად 10%-ს, სტანდარტულ შემთხვევაში, 1,000 ლარიანი არაუზრუნველყოფილი სესხის გაცემისას, ბანკებს მოუწევდათ 100 ლარის მოცულობის რეზერვის შექმნა (1,000×10%). ხოლო ნაშრომში განხილული მეთოდოლოგიის თანახმად, რეზერვის მოცულობა შესაძლებელია შემცირდეს 39.9 ლარამდე (399×10%). ამგვარად ბანკები შეძლებენ რეზერვების უფრო მეტად ეფექტურად მართვასა და ზედმეტი თანხის მომგებიან ინვესტიციებად გარდაქმნას.

ნაშრომში განხილული მონაცემები წარმოადგენს საილუსტრაციო მაგალითს და არ გულისხმობს, რომ ყველა შემთხვევაში სესხის თანხა და გადეფოლტების დროს ნაშთის ერთობლივი განაწილება Ali-Mikhael Haq-ის კოპულით მიიღება. რეალურ სამყაროში, სხვადასხვა მონაცემებს სხვადასხვა კოპულა ერგება.

დასკვნა

სესხის მოსალოდნელი დანაკარგის ერთ-ერთი კომპონენტის EAD-ის შესაფასებელი მოდელები არ არსებობს. ნაშრომში შემოთავაზებულია მოდელი, რომელიც სესხის მოცულობასა და EAD შორის კანონზომიერებას, შემთხვევით სიდიდეთა წყვილის აღმწერი კოპულა ფუნქციით აფასებს.

ერთ-ერთი ბანკის სესხის მოცულობასა და EAD წყვილებზე მოვარგეთ Ali Mikhael Haq-ის კოპულა, რომელმაც საშუალება მოგვცა ნებისმიერი სესხის მოცულობისთვის წინასწარ განგვესაზღვრა სესხის მოსალოდნელი ნაშთი გადეფოლტების დროს. მოდელის გამოყენებით განვიხილეთ კონკრეტულ შემთხვევა 1,000 ლარიანი სესხის მოცულობის მაგალითზე. შესაბამისი განაწილებებით U და V-ს პოვნის შემდეგ, გადეფოლტების დროს მოსალოდნელი ნაშთი მივიღეთ 399 ლარი.

S(inv)	SU	V	EAD
1,000	0.08	0.39	399.3

როგორც ვნახეთ, კოპულა ფუნქციის მეშვეობით წარსულ მონაცემებზე დაყრდნობით შესაძლებელია მომავალი EAD-ის შეფასება. რადგან საბანკო სივრცე-ში მისი შესაფასებელი მოდელი არ არსებობს, კოპულა ფუნქციის გამოყენება ხელსაყრელია, რადგან EAD-ის წინასწარი შეფასება ბანკებს მისცემთ საშუალებას სწორად განსაზღვრონ მოსალოდნელი დანაკარგი და თითოეულ სესხზე დააწესონ შესაბამისი რეზერვი.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Anthony Sounders, Marcia Millon Cornett /2008/ Financial Institutions Management- A Risk Management Approach sixth edition.
2. Christian Bluhm, LudgerOverbeck, Christoph Wagner/ An Introduction To Credit Risk Modeling /2003.
3. BodgieOzdemir, Peter Miu /Basell II Implementation/2015/- A Guide to Developing and Validating a Compliant, Internal Risk Rating System
4. Bank For International Settlements / 2005/ Basel Committee on Banking Supervision- International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards.
5. Roger B. Nelsen/ An Introduction to Copulas/2006/ second edition, Lecture Notes in Statistics. Vol. 139, Springer, New York